Corrigé Exercice 1

Soit p une loi de probabilité sur un ensemble fini Ω et soient A, B, C des événements avec

- $p(A) = 0.3$
- $p(B) = 0.2$
- $p(C) = 0.2$
- $p(A \cap B) = 0.1$
- $p(A \cup C) = 0.44$

1) a) $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.3 = 0.7$

b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.3 + 0.2 - 0.1 = 0.4$

c) $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0.1}{0.3} = \dfrac{1}{3} \sim 0.33$

d) $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0.1}{0.2} = \dfrac{1}{2} = 0.5$

2) a) Les événements A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$, ce qui implique $p(A \cap B) = 0$.

Or $p(A \cap B) = 0.1 \neq 0$, donc $A \cap B \neq \emptyset$ de telle sorte que les événements A et B ne sont pas incompatibles.

b) Les événements A et B sont indépendants lorsque $p_A(B) = p(B)$.

Or $p_A(B) = \dfrac{1}{3} \sim 0.33$ d'après 1.c) et $p(B) = 0.2$ par hypothèse.

Ainsi, $p_A(B) \neq p(B)$, de telle sorte que les événements A et B ne sont pas indépendants.

3) a) $p(A \cap C) = p(A) + p(C) - p(A \cup C) = 0{,}3 + 0{,}2 - 0.44 = 0.06$

b) $p_A(C) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(A)} = \dfrac{0.06}{0.3} = \dfrac{1}{5} = 0.2$

c) $p_C(A) = \dfrac{p(A \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0.06}{0.2} = \dfrac{3}{10} = 0.3$

4) a) Les événements A et C sont incompatibles lorsque $A \cap C = \emptyset$, ce qui implique $p(A \cap C) = 0$.

Or $p(A \cap C) = 0.06$ d'après 3a). Ainsi $p(A \cap C) \neq 0$, donc $A \cap C \neq \emptyset$ de telle sorte que les événements A et C ne sont pas incompatibles.

b) Les événements A et C sont indépendants lorsque $p_A(C) = p(C)$.

Or $p_A(C) = 0.2$ d'après 3.c) et $p(C) = 0.2$ par hypothèse.

Ainsi, $p_A(C) = p(C)$, de telle sorte que les événements A et C sont indépendants.

Corrigé Exercice 2

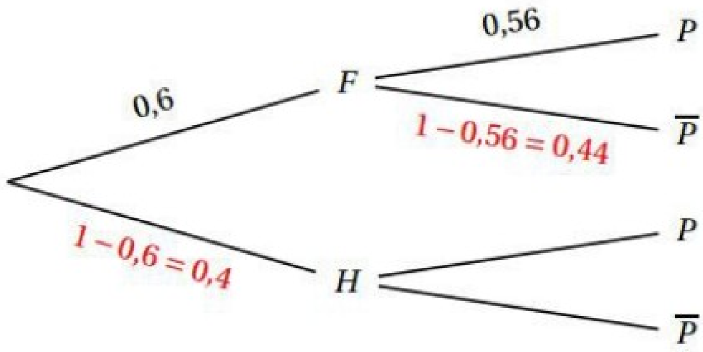
D'après une enquête menée auprès d'une population, on a constaté que :

- 60 % de la population sont des femmes ;
- 56 % des femmes travaillent à temps partiel ;
- 36 % de la population travaillent à temps partiel.

On interroge une personne dans la population. Elle affirme qu'elle travaille à temps partiel.
On note :

- F l'événement « la personne interrogée est une femme » ;
- H l'événement « la personne interrogée est un homme » ;
- P l'événement « la personne interrogée travaille à temps partiel » ;
- $\overline{P}$ l'événement « la personne interrogée ne travaille pas à temps partiel ».

On regroupe les données du texte dans un arbre pondéré :



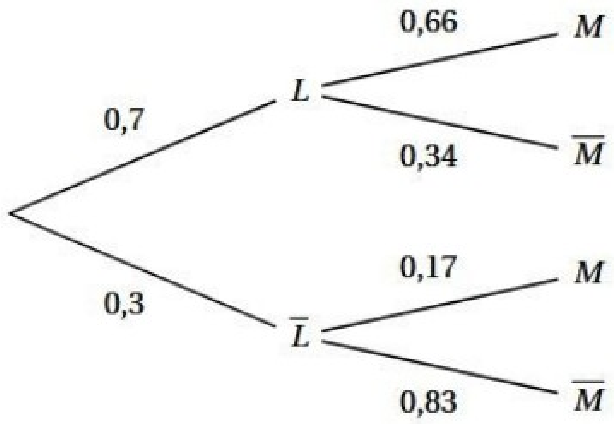
On cherche à déterminer la probabilité que la personne interrogée soit un homme, c'est à dire :

$$p_P(H) = \frac{p(P \cap H)}{p(P)}.$$

D'après le texte, $p(P) = 0{,}36$.
D'après la formule des probabilités totales : $p(P) = p(F \cap P) + p(H \cap P) = p(F) \times p_F(P) + p(H \cap P)$.
On en déduit que $0{,}36 = 0{,}6 \times 0{,}56 + p(H \cap P)$ donc que $p(H \cap P) = 0{,}36 - 0{,}6 \times 0{,}56 = 0{,}024$.
Donc $p_P(H) = \dfrac{p(P \cap H)}{p(P)} = \dfrac{0{,}024}{0{,}36} = \dfrac{1}{15}$

Corrigé Exercice 3

1. L'énoncé donne $P(L) = 0,7$, $P_L(M) = 0,66$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right) = 1 - 0,83 = 0,17$.
2. On complète l'arbre pondéré suivant représentant la situation.



3. On calcule $P(L \cap M) = P(L) \times P_L(M) = 0,7 \times 0,66 = 0,462$.
4. On calcule de même $P\left(\overline{L} \cap M\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(M) = 0,3 \times 0,17 = 0,051$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $P(M) = P(L \cap M) + P\left(\overline{L} \cap M\right) = 0,462 + 0,051 = 0,513$.
5. La probabilité d'avoir un licencié parmi ceux qui ont fait le parcours en moins de 5 heures est égale à :
   $P_M(L) = \dfrac{P(M \cap L)}{P(M)} = \dfrac{0,462}{0,513} = \dfrac{462}{513} \approx 0,9006$ soit effectivement un tout petit plus de 90 %.